TD : Ensembles Dénombrables

Olivier Raynaud (raynaud@isima.fr)

Exercice 1. *Hotel de Hilbert*

FIGURE 1 – L'infini et ses paradoxes Image extraite de : univers des sciences - WordPress.com

Un hôtel muni d'un nombre de chambres infini numérotées par les entiers de 0, 1, 2,... *est complet pour la nuit (un client occupe chaque chambre). Un nouveau client arrive, le responsable de l'accueil, M. Troffort, téléphone de faÁon simultanée à tous ses hôtes et leurs demande de passer de leur chambre actuelle à la suivante dans l'ordre de numérotation. Le nouveau client est alors installé dans la chambre* 0 *devenue libre.*

Question 1. *Plus tard arrive un car de taille infini de nouveaux clients. Comment procédera M. Troffort pour installer confortablement tous ses nouveaux hôtes.*

Question 2. *Plus tard encore, une infinité de cars, chacun de taille infinie, stationnent sur le parking - lui même de taille infinie. Comment devra procéder M. Troffort.*

Définition 1. *Deux ensembles A et B sont dits équipotents et on écrit $A \sim B$,* ***si et seulement si*** *il existe une bijection de l'un sur l'autre.*

Définition 2. *Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, un ensemble A est dit infini dénombrable si $|A| = |\mathbb{N}|$, c'est à dire si $A \sim \mathbb{N}$.*

Définition 3. *Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, la cardinalité de l'ensemble $\mathbb{N}$ est dénoté $\aleph_0$, autrement dit $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ainsi tout ensemble infini dénombrable a une cardinalité de $\aleph_0$.*

Exercice 2. *Propriétés*

Question 1. *Soit A est un ensemble non vide, montrer que A est dénombrable* ***si et seulement si*** *il existe une fonction injective $g : A \to \mathbb{N}$.*
En déduire que A est infini dénombrable ***si et seulement si*** *ses éléments peuvent-être rangés dans une liste infinie de type $a_1, a_2, a_3, ...$*

Question 2. *Soit A est un ensemble non vide, montrer que A est dénombrable* ***si et seulement si*** *il existe une surjection $h : \mathbb{N} \to A$.*

Question 3. *Montrer que :*

1. ***Si*** *B est dénombrable et $g : A \to B$ est injective,* ***alors*** *A est dénombrable ;*
2. ***Si*** *B est dénombrable et $A \subseteq B$,* ***alors*** *A est dénombrable ;*

Question 4. *Montrer que* ***si*** *il existe un algorithme d'énumération des éléments d'un ensemble S* ***alors*** *S est dénombrable.*

Exercice 3. *Ensembles dénombrables*

Question 1. *Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres relatifs est infini dénombrable.*

Question 2. *Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ des couples d'entiers est infini dénombrable.*

Question 3. *Montrer que pour tout k fixé, l'ensemble $\mathbb{N}^k$ des chaînes de tailles k est infini dénombrable.*

Question 4. *Soient A et B, deux ensembles infinis dénombrables, montrer que le produit cartésien $A \times B$ est infini dénombrable.*

Question 5. *Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est infini dénombrable.*

Question 6. *Soient A_1, A_2, .. A_n un ensemble fini d'ensembles infinis dénombrables avec $n \geq 2$, montrer que le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ est infini dénombrable.*

Question 7. *Soient A et B deux ensembles dénombrables, montrer que $A \cup B$ est dénombrable. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. En déduire que $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est un ensemble dénombrable.*

Question 8. *Soit $\Sigma = \{a_1,\ a_2, ...,\ a_k\}$ un alphabet de taille k. Soit Σ^* l'ensemble de tous les mots finis sur Σ, montrer que Σ^* est dénombrable.*